**3.16. Turunan fungsi inversi**

Pada bab II telah dibahas tentang fungsi inversi. Fungsi yang mempunyai fungsi inversi, tentu mempunyai turunan. Karena tidak semua fungsi mempunyai fungsi turunan, berikut disajikan teorema yang berkaitan dengan fungsi inversi tersebut.

Teorema : Misalkan f adalah fungsi satu-satu yang terdefinisi pada interval buka I dan terdeferensialkan pada x ϵ I dengan f '(x) ≠ 0. Misal g = f- -1 , dan misal y = f(x). Maka g terdeferensialkan pada y, dan g'(y) = .

Bukti: Pilih h, sehingga (x+h) ∈ I, dan misalkan f(x+h) - f(x) = k; k ≠ 0 dan h ≠ 0, karena f fungsi satu-satu, maka diperoleh

f(x+h) = f(x)+ k = y + k dan g(y+k) = g((x+h)) = x + h

karena g = f- -1 , dan

h = g(y+k) - x = g(y+k) - g(y)

Karena g kontinu pada y, untuk k → 0 mengakibatkan h → 0.

Dengan demikian

g'(y) =

=

= [∵ pembilang dan penyebut dibagi dengan h]

=

***Contoh 1***: Tentukan turunan fungsi inversi dari f(x) = 3x - 5

Penyelesaian: Misal f(x) = y, maka y = 3x - 5 atau

3x = y + 5 ⇒ x = g(y) = 1/3 y + 5/3

dx/dy = g'(y) = 1/3 (1)

f(x) = 3x - 5 ⇒ f '(x) = dy/dx = 3 (2)

dari (1) dan (2) terbukti bahwa dx/dy = ∎

***Contoh 2***: Tentukan turunan fungsi inversi dari f(x) = x2 - 9

Penyelesaian: Misal f(x) = y, maka y = x2 - 9 atau

x2 = y + 9 ⇒ x = g(y) = ±

⇔ g(y) = ± (y + 9 )1/2 , didapat

g'(y) = ± ½ (y + 9 ) ½-1. (y + 9)

g'(y) = ± ½ (y + 9 ) -½ .

g'(y) = ± berarti

g'(y) = dx/dy = atau g'(y) = dx/dy = -

Pilih g'(y) = dx/dy = dan substitusikan dengan y = x2 - 9

diperoleh g'(y) = dx/dy = = (1)

f(x) = x2 - 9 ⇒ f '(x) = dy/dx = 2x (2)

dari (1) dan (2) terbukti bahwa dx/dy = ∎

**3.17. Turunan inversi fungsi trigonometri**

Fungsi-fungsi inversi dari fungsi Trigonometri adalah:

1. Fungsi inversi dari f (x) = sin x adalah sin-1 x = arc sin x

2. Fungsi inversi dari f(x) = cos x adalah cos-1 x = arc cos x

3. Fungsi inversi dari f(x) = tan x adalah tan-1 x = arc tan x

4. Fungsi inversi dari f(x) = ctg x adalah ctg-1 x = arc ctg x

5. Fungsi inversi dari f(x) = sec x adalah sec-1 x = arc sec x

6. Fungsi inversi dari f(x) = csc x adalah csc-1 x = arc csc x

3.17.1. TURUNAN FUNGSI INVERSI DARI FUNGSI SINUS

Jika f(x) = arc sin x, maka f '(x) =

Bukti: f(x) = arc sin x atau y = arc sin x

y = arc sin x identik dengan x = sin y

x = sin y ⇒ = cos y 1)

x = sin y ⇒ x2 = sin2 y

cos2 y + sin2 y = 1 ⇒ cos2 y = 1 - sin2 y atau cos2 y = 1 – x2.

cos2 y = 1 – x2 ⇒ cos y =

sehingga persamaan 1) menjadi

= cos y =

Pilih cos y = , didapat

= ∎

***Perluasannya***

f(x) = arc sin g(x) ⇒ f '(x) =

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = arc sin g(x) menjadi y = arc sin u

g(x) = u didapat = g'(x)

y = arc sin u identik dengan u = sin y

u = sin y ⇒ = cos y 1)

u = sin y ⇒ u2 = sin2 y

cos2 y + sin2 y = 1 ⇒ cos2 y = 1 - sin2 y

cos2 y = 1 - sin2 y ⇔ cos2 y = 1 - u2

cos2 y = 1 - u2 ⇒ cos y =

Pilih cos y =

sehingga persamaan 1) menjadi

= cos y = dan =

dengan aturan rantai diperoleh

= . g'(x) atau

= ∎

***Contoh 1***: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc sin 5x2

Penyelesaian: Misal u = g(x) = 5x2 diperoleh

= g'(x) = 10 x

y = arc sin 5x2 menjadi y = arc sin u

y = arc sin u identik dengan u = sin y dan u2 = sin2 y

cos2 y + sin2 y = 1 ⇒ cos2 y = 1 - sin2 y

⇔ cos2 y = 1 - u2 atau cos y =

Pilih cos y =

= cos y = , didapat =

= . 10 x = atau

=

Contoh 2: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc sin x/a

Penyelsaian: Misal u = g(x) = x/a, maka

du/dx = g'(x) = 1/a

y = arc sin u identik dengan u = sin y

= cos y = , didapat =

= . 1/a atau

= atau

= atau

=

**3.17.2. Turunan fungsi inversi dari fungsi cosinus**

Jika f(x) = arc cos x, maka f '(x) =

Bukti: f(x) = arc cos x atau y = arc cos x

y = arc cos x identik dengan x = cos y

= - sin y 1)

x = cos y ⇒ x2 = cos2 y

cos2 y + sin2 y = 1 ⇒ sin2y = 1 - cos2 y

sin2y = 1 - cos2 y ⇔ sin y = ±

Pilih sin y =

sehingga persamaan 1) menjadi

= - sin y = -

= ∎

Perluasannya

f(x) = arc cos g(x) ⇒ f '(x) = (Buktikan!)

Contoh 1: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc cos x2 .

Penyelesaian. Misal u = g(x) = x2 diperoleh

= g'(x) = 2 x

y = arc cos x menjadi y = arc cos u

y = arc cos u identik dengan u = cos y

u = cos y ⇒ u2 = cos2 y

cos2 y + sin2 y = 1 ⇒ sin2 y = 1 - cos2 y

sin2 y = 1 - cos2 y ⇔ sin2 y = 1 - u2

diperoleh sin y =

Pilih sin y =

= - sin y = - diperoleh =

= . 2x atau

=

Contoh 2. Tentukan f '(x), jika f(x) = arc cos (4x - 5)

Penyelesaian. Misal u = g(x) = (4x - 5) diperoleh

= g'(x) = 4

y = arc cos (4x - 5) menjadi y = arc cos u

y = arc cos u identik dengan u = cos y

u = cos y ⇒ u2 = cos2 y

cos2 y + sin2 y = 1 ⇒ sin2 y = 1 - cos2 y

sin2 y = 1 - cos2 y ⇔ sin2 y = 1 - u2

diperoleh sin y =

Pilih sin y =

= - sin y = - diperoleh =

= . 4 atau

=

**3.17.3. Turunan fungsi inversi dari fungsi tangen**

Jika f(x) = arc tan x, maka f '(x) =

Bukti: f(x) = arc tan x atau y = arc tan x

y = arc tan x identik dengan x = tan y

= sec2 y = 1 + tan2 y = 1 + x2

= = ∎

Perluasannya

Jika f(x) = arc tan g(x), maka f '(x) =

Bukti: Misal u = g(x) dan f(x) = y, maka

f(x) = arc tan g(x) menjadi y = arc tan u

y = arc tan u identik dengan u = tan y

Dari u = g(x) diperoleh = g'(x)

Dari u = tan y diperoleh = sec2 y = 1 + tan2 y = 1 + u2

= 1 + u2 ⇒ =

= . g'(x) , [aturan rantai]

= . atau

= ∎

Contoh : Tentukan turunan pertama dari

a. f(x) = arc tan (3x - 5)

b. f(x) = arc tan 5 x2

Penyelesaian:

Dengan menerapkan rumus di atas diperoleh

a. f '(x) = = atau

=

b. f '(x) = =

=

**3.17.4. Turunan fungsi inversi dari fungsi cotangen**

Jika f(x) = arc cot x, maka f '(x) = (Buktikan!)

Perluasannya:

Jika f(x) = arc ctg(x),maka f '(x) =

(Buktikan!)

**3.17.5. Turunan fungsi inversi dari fungsi secant**

f(x) = arc sec x ⟶ f '(x) =

(Buktikan!)

Perluasannya

f(x) = arc sec g(x) ⟶ f '(x) =

(Buktikan!)

**3.17.6. Turunan Fungsi inversi dari fungsi cosecant**

f(x) = arc csc x ⟶ f '(x) = (Buktikan !)

Perluasannya

f(x) = arc csc g(x) ⟶ f'(x) =

(Buktikan!)

**3.18. Turunan fungsi inversi dari fungsi hiperbolik**

Fungsi-fungsi inversi dari fungsi Hiperbolik adalah:

1. Fungsi inversi dari f (x) = sinh x adalah sinh-1 x = arc sinh x

2. Fungsi inversi dari f(x) = cosh x adalah cosh-1 x = arc cosh x

3. Fungsi inversi dari f(x) = tanh x adalah tanh-1 x = arc tanh x

4. Fungsi inversi dari f(x) = ctgh x adalah ctgh-1 x = arc ctgh x

5. Fungsi inversi dari f(x) = sech x adalah sech-1 x = arc sech x

6. Fungsi inversi dari f(x) = csch x adalah csch-1 x = arc csch x

**3.18.1. Turunan fungsi inversi dari fungsi sinus hiperbolik**

f(x) = arc sinh x ⟶ f '(x) =

Bukti: f(x) = arc sinh x atau y = arc sinh x

y = arc sinh x identik dengan x = sinh y

= cosh y 1)

x = sinh y ⇒ x2 = sinh2 y

cosh2 y – sinh2 y = 1 ⇒ cosh2 y = 1 + x2

cosh2 y = 1 + x2  ⇒ cosh y = ±

Pilih cosh y =

sehingga persamaan 1) menjadi

= cosh y =

= = ∎

Perluasannya

f(x) = arc sinh g(x) ⟶ f '(x) =

(Buktikan!).

Contoh 1: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc sinh (ax + b)

Penyelesaian

Misal g(x) = ax + b, maka g' (x) = a, sehingga

f '(x) =

Contoh 2: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc sinh (ax2 + bx + c)

Penyelesaian

Misal g(x)= (ax2 + bx + c), maka g'(x) = 2 ax + b, sehingga

f '(x) =

**3.18.2. Turunan Fungsi inversi dari fungsi cosinus hiperbolik**

f(x) = arc cosh x ⇒ f '(x) =

Bukti: f(x) = arc cosh x atau y = arc cosh x

y = arc cosh x identik dengan x = cosh y

= sinh y 1)

x = cosh y ⇒ x2 = cosh2 y

cosh2 y – sinh2 y = 1 ⇒ sinh2y = x2 - 1

sinh2y = x2 - 1 ⇒ sinh y = ±

Pilih sinh y =

sehingga persamaan 1) menjadi

= sinh y =

= = ∎

Perluasannya

f(x) = arch cosh g(x) ⟶ f '(x) =

(Buktikan!)

Contoh 1: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc cosh 3x2.

Penyelesaian. Misal g(x) = 3x2, maka g'(x) = 6 x

f '(x) =

Contoh 2: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc cosh (sech x).

Penyelesaian. Misal g(x) = sech x, maka g'(x) = sec xh . tanh x

f '(x) = =

= sech x

**3.18.3. Turunan fungsi inversi dari fungsi tangent hiperbolik**

f(x) = arc tanh x ⟶ f '(x) =

Bukti: f(x) = arc tanh x atau y = arc tanh x

y = arc tanh x identik dengan x = tanh y

= sech2 y = 1 – tanh2y = 1 - x2

= = ∎

Perluasannya

f(x) = arc tanh g(x) ⟶ f '(x) =

Bukti: Misal u = g(x) dan f(x) = y, maka

f(x) = arc tanh g(x) menjadi y = arc tanh u

y = arc tanh u identik dengan u = tanh y

Dari u = g(x) diperoleh = g'(x)

Dari u = tan y diperoleh = sech2 y = 1 – tan2 y = 1 – u2

= , dengan aturan rantai diperoleh

= g'(x) atau

= ∎

Contoh 1: Tentukan f '(x), jika f(x) = arc tanh 3 x2

Penyelesaian. f '(x) =

Contoh 2: Tentukan f '(x), jika f(x) = 2 arc tanh (tan 1/2 x)

Penyelesaian. Misal g(x) = tanh (1/2 x), maka g '(x) = ½ . sech2 (1/2 x)

f '(x) = 2

=

**3.18.4. Turunan fungsi inversi dari fungsi cotangent hiperbolik**

f(x) = arc coth x ⇒ f '(x) = . (Buktikan!)

Perluasannya:

f(x) = arc coth g(x) ⇒ f '(x) =

(Buktikan!)

**3.18.5. Turunan fungsi inversi dari fungsi secant hiperbolik**

f(x) = arc sech x ⟶ f '(x) = . (Buktikan!)

Perluasannya

f(x) = arc sech g(x) ⟶ f '(x) =

(Buktikan!)

**3.18.6. Turunan fungsi inversi dari fungsi cosecant hiperbolik**

f(x) = arc csch x ⟶ f '(x) = . (Buktikan!)

Perluasannya

f(x) = arc csch g(x) ⟶ f ' (x) =

(Buktikan!)